Herhaaltentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen, 2005-2006

Datum : 30-06-2006

Het tentamen is open boek; u mag al uw boeken, aantekeningen, etc. gebruiken.
U dient al uw antwoorden te motiveren en duidelijk aan te geven welke stellingen u eventueel gebruikt. Blijf niet eindeloos aan een onderdeel werken. Indien u een onderdeel niet kunt, ga dan gewoon verder en gebruik het resultaat (indien mogelijk).

1. Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= y \\ \tfrac{dy}{dt} &= -x + x^2 \end{aligned}$$

   (a) Bewijs dat er precies twee stationaire oplossingen zijn en bepaal deze.

   (b) Geef een differentiaalvergelijking voor y als functie van x en los deze op.

   (c) Bepaal de nul-isoclienen van het stelsel differentiaalvergelijkingen.

   (d) Schets vervolgens het faseplaatje. Geef aan voor welke waarden van de integratieconstante c in de beschrijving (b) de oplossing periodiek is, en geef de periodieke oplossingen aan in het faseplaatje.

2. (a) Bepaal alle oplossingen van

$$\frac{dy}{dx} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} y$$

   (b) Bepaal de oplossing van

$$\frac{dy}{dx} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} x \\ x-1 \end{bmatrix}, \quad y(0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

   (c) Bepaal alle oplossingen van

$$\frac{dy}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y$$

   (d) Beschouw de differentiaalvergelijking

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$$

   Toon aan dat $\phi(x, y) = x$ een integrerende factor is, en los de differentiaalvergelijking op.

Z.O.Z.

3. (a) Beschouw de homogene n-de orde lineaire differentiaalvergelijking op een interval $[a, b]$

$$\frac{d^n u}{dx^n}(x) + p_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}(x) + \cdots + p_0(x)u(x) = 0$$

(dus de coefficient $p_{n-1}(x)$ is gelijk aan nul voor $x \in [a, b]$).
Bewijs dat de Wronskiaan (= de determinant van een fundamentele matrix) constant is op $[a, b]$.
Kan die constante gelijk aan nul zijn ? Verklaar uw antwoord.

(b) Laat zien dat differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$\frac{dy}{dx} = f(x + y + c)$$

met c een constante, opgelost kunnen worden door middel van de substitutie $z = x + y + c$. Los hiermee de volgende differentiaalvergelijking op

$$\frac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2$$

(c) Bepaal d.m.v. Picard iteratie de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = 2xy, \quad y(0) = 1$$

4. Beschouw het randwaarde probleem

$$y'' + y = \sin(x), \quad y(0) + y'(0) = 0, \quad y(\frac{1}{2}\pi) = 0$$

(a) Bewijs dat dit randvoorwaardeprobleem precies één oplossing heeft op $[0, \frac{1}{2}\pi]$. Formuleer de gebruikte stelling.

(b) Bereken de oplossing van het randvoorwaardeprobleem met behulp van oplossingen van de homogene en een particuliere oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking.

Puntenverdeling:

1. a: 5, b: 5, c: 5, d: 8.
2. a: 7, b: 7, c: 7, d: 7.
3. a: 7, b: 8, c: 9.
4. a: 7, b: 8.

Gratis: 10